

उ. प्र. लोक सेवा आयोग द्वारा आयोजित परीक्षाओं हेतु
जी.आई.सी./आश्रम पद्धति/डायट परीक्षा प्रश्न-पत्र
(GIC/Ashram Padhati/DIET Exam. Question Paper)

गणित

सॉल्व्ड पेपर्स

एवं

प्रैक्टिस बुक

व्याख्या सहित हल प्रश्न-पत्र

प्रधान सम्पादक

आनन्द कुमार महाजन

संपादन एवं संकलन

परीक्षा विशेषज्ञ समिति

कम्प्यूटर ग्राफिक्स

बालकृष्ण, चरन सिंह

सम्पादकीय कार्यालय

यूथ कॉम्पिटिशन टाइम्स

12, चर्च लेन, प्रयागराज-211002

☎ फोन : 9415650134

Email : yctap12@gmail.com

Website : www.yctbooks.com

प्रकाशन घोषणा

प्रधान सम्पादक एवं प्रकाशक आनन्द कुमार महाजन ने आर.ए. सिक्वोरिटी, प्रयागराज से मुद्रित करवाकर,
यूथ कॉम्पिटिशन टाइम्स, 12, चर्च लेन, प्रयागराज के लिए प्रकाशित किया।

इस पुस्तक को प्रकाशित करने में पूर्ण सावधानी बरती गई है
फिर भी किसी त्रुटि के लिए आपका सुझाव सादर आमंत्रित है।
किसी भी विवाद की स्थिति में न्यायिक क्षेत्र प्रयागराज होगा।

मूल्य : 395/-

विषय-सूची

सॉल्व्ड पेपर

■ जी. आई. सी. प्रवक्ता पाठ्यक्रम.....	3-4
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता परीक्षा, 2021 व्याख्या सहित हल प्रश्न-पत्र.....	5-20
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता परीक्षा, 2015 व्याख्या सहित हल प्रश्न-पत्र.....	21-49
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता (शिक्षा विभाग) परीक्षा, 2015 व्याख्या सहित हल प्रश्न-पत्र.....	50-74

प्रैक्टिस सेट

■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 1	75-83
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 1 : व्याख्या सहित हल	84-97
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 2	98-106
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 2 : व्याख्या सहित हल	107-120
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 3	121-129
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 3 : व्याख्या सहित हल	130-143
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 4	144-152
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 4 : व्याख्या सहित हल	153-166
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 5	167-175
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 5 : व्याख्या सहित हल	176-188
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 6	189-196
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 6 : व्याख्या सहित हल	197-208
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 7	209-216
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 7 : व्याख्या सहित हल	217-230
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 8	231-237
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 8 : व्याख्या सहित हल	238-249
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 9	250-256
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 9 : व्याख्या सहित हल	257-268
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 10	269-276
■ जी.आई.सी. प्रवक्ता प्रैक्टिस सेट - 10 : व्याख्या सहित हल	277-288

उत्तर प्रदेश लोक सेवा आयोग

प्रवक्ता (पुरुष/महिला) राजकीय इण्टर कालेज परीक्षा 2020

पाठ्यक्रम

प्रारम्भिक परीक्षा हेतु परीक्षा योजना एवं पाठ्यक्रम

प्रारम्भिक परीक्षा में सामान्य अध्ययन/वैकल्पिक विषय का एक प्रश्नपत्र होगा जो वस्तुनिष्ठ व बहुविकल्पी प्रकार का होगा। इसमें प्रश्नों की संख्या 120 (वैकल्पिक विषय के 80 प्रश्न तथा सामान्य अध्ययन के 40 प्रश्न) होगा जो कुल 300 अंकों का तथा समय 2 घंटों का होगा।

सामान्य अध्ययन

1. सामान्य विज्ञान
2. भारत का इतिहास
3. भारतीय राष्ट्रीय आंदोलन
4. भारतीय राजतंत्र, अर्थव्यवस्था एवं संस्कृति
5. भारतीय कृषि, वाणिज्य एवं व्यापार
6. विश्व भूगोल तथा भारत का भूगोल एवं प्राकृतिक संसाधन
7. अधुनातन राष्ट्रीय एवं अंतर्राष्ट्रीय महत्वपूर्ण घटनाक्रम
8. सामान्य बौद्धिक एवं तार्किक क्षमता
9. उत्तर प्रदेश की शिक्षा, संस्कृति, कृषि, उद्योग, व्यापार एवं रहन-सहन और सामाजिक प्रथाओं के संबंध में विशिष्ट जानकारी
10. प्रारम्भिक गणित (आठवीं स्तर तक) – अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित
11. परिस्थितिकी तथा पर्यावरण

वैकल्पिक विषय (Optional Subject)

गणित

1. **सम्बन्ध और फलन:** सम्बन्धों के प्रकार, स्वतुल्य, सममित, संक्रामक और तुल्य सम्बन्ध, तुल्यता क्लास, एकैकी एवं आच्छादक फलन, संयुक्त फलन प्रतिलोम फल, द्विआधारी संक्रियायें।
2. **बीज गणित:**
 - (i) **आव्यूह:** आव्यूह के प्रकार, शून्य आव्यूह, परिवर्त आव्यूह, सममित और वि सममित आव्यूह, आव्यूह का सहखण्डन, आव्यूह का प्रतिलोम, आव्यूह की सहायता से तीन अज्ञात राशियों के युगपत के समीकरण का हल।

- (ii) **सारणित:** उपसारणिक व सहखण्ड 3×3 क्रम तक से सारणिक का विस्तार, सारणिक के गुण धर्म, सहखण्डज एवं प्रतिलोम ज्ञात करना (वर्ग आव्यूह का)। संगति एवं असंगति तथा रेखीय समीकरणों का हल व उदाहरण। दो या तीन चर राशियों के रेखीय युगपद समीकरणों का हल प्राप्त करना।
- (iii) दो या दो से अधिक कोटि के समीकरण का सिद्धान्त, समान्तर, गुणोत्तर व हरात्मक श्रेणी, क्रमचय एवं संचय द्विपद प्रमेय, चरघातांकीय एवं लघुगणकीय सीरीज का प्रयोग।
- (vi) **प्रायिकता:** प्रायिकता का गुणन प्रमेय, प्रतिबन्धित प्रायिकता, स्वतन्त्र घटनायें, पू. प्रायिकता, वेजप्रमेय, द्विपद वितरण।

अवकलन एवं समाकलन :

- (i) फलन की सीमा, सततता एवं अवकलनियता, संयुक्त फलन व्युत्पत्ति या अवकलज, विभिन्न प्रकार के फलनों की अवकलननियता, श्रृंखला नियम, रो का प्रमेय, लैंग्राजि का मध्यमान प्रमेय, मेक्लारिन्स एवं टेलर श्रेणी, एल. हास्पिटल का नियम, आंशिक अवकलन, क्रमागत अवकलन लिब्निट्ज का प्रमेय, दिये वक्र पर स्पर्शी एवं अभिलम्ब का समीकरण, निम्निष्ठ एवं उच्चिष्ठ, वर्धमान फलन का हासवान फलन।
 - (ii) **समाकलन :** समाकलन के विभिन्न विधियाँ, निश्चित समाकलन, फलनों के योग एवं गुणन की सीमा, निश्चित समाकलन के गुणधर्म, निश्चित समाकलन को हल करना। साधारण वक्र के क्षेत्रफल में समाकलन का प्रयोग, गोले, कोन व सिलिण्डर का पृष्ठीय एवं आयतन ज्ञात करना।
 - (iii) **अवकल समीकरण :** अवकल समीकरण की कोटि एवं घात, जिसका सामान्य हल दिया हो उसका अवकल समीकरण बनाना, प्रथम कोटि एवं प्रथम घात के अवकल समीकरण का हल, रैखिक अवकल समीकरण (अचर गुणांकों के), समघात अवकल समीकरण।
- द्विविमीय निर्देशांक ज्यामिति:** समघातीय एवं असम-घातीय रेखायुग्म का समीकरण, रेखायुग्म होने का प्रतिबन्ध (वृत्त, परवलय, अतिपरवलय, दीर्घवृत्त) उपरोक्त वक्र पर स्पर्शियों एवं अभिलम्बों का समीकरण, दो शांकवों पर उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा, स्पर्श युग्म, स्पर्श की जीवा, उपरोक्त शांकवों के ध्रुवीय रेखायें।
- (i) **सदिश:** सदिश एवं अदिश राशियाँ, इकाई सदिश, दिकाज्या एवं दिक्-अनुपात, सादिशों का अचर का सदिश के साथ गुणन, अदिश एवं सदिश गुणन का भौतिकी में अनुप्रयोग (किया हुआ कार्य आधुर्ण), रेखा का सदिश प्रक्षेप, दो सादिशों के मध्य का कोण।

- (ii) **त्रिकोणीय ज्यामिति:** दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का दिकोज्या दिकअनुपात रेखा का कार्तीय एवं सदिश समीकरण, समतलीय एवं विसमतलीय रेखायें रेखाओं के बीच की न्यूनतम दूरी, समतल में कार्तीय एवं सदिश का समीकरण, दो रेखा के मध्य का कोण, दो समतलों के मध्य का कोण, एक रेखा की समतल से दूरी, दो रेखा का प्रतिच्छेदन, रेखा एवं समतल का प्रतिच्छेदन दो समतलों का प्रतिच्छेदन, दो समतलों के प्रतिच्छेदन से गुजरने वाले समतल का समीकरण।

युग: उदाहरण-विशेष रूप से इकाई के दो मूलों का ग्रुप, अवशेष वर्ग द, त माडलों च (जहाँ च अभाज्य संख्या है) के ग्रुप, उपग्रुप, समाकारिता, तुल्यकारिता, समाकारिता के गुण, उपसमुच्चय द्वारा जनित उपग्रुप, ग्रुप के अवयव का कोटि, चक्रीय ग्रुप, समामित ग्रुप, द लैंगरेन्ज की प्रमेय, फरमैट की प्रमेय (उपयोगिता के दृष्टिकोण से) प्रासामान्य उपग्रुप, समाकारिता का मौलिक प्रमेय, अंतराकारिता, स्वाकारिता, प्रथम एवं द्वितीय तुल्यकारिता प्रमेय।

वलय एवं क्षेत्र: सरल उदाहरण जैसे $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$

रैखिक बीजगणित: सदिश समष्टि के उदाहरण, उपसदिश समष्टि, रैखिक आश्रितता, रैखिक अनाश्रितता, सदिश समष्टि का आधार एवं विमा, विभाग समष्टि, उपसदिश, समष्टियों का योग तथा प्रत्यक्ष योग।

रैखिक रूपान्तरण: रैखिक रूपान्तरण की अष्टि तथा प्रतिबिम्ब, रैखिक रूपान्तरण की कोटि एवं शून्यता तथा कोटि-शून्यता का प्रमेय, संयुक्त रैखिक रूपान्तरण की कोटि एवं शून्यता तथा कोटि-शून्यता का प्रमेय, संयुक्त रैखिक रूपान्तरण की कोटि एवं शून्यता व्युत्क्रमणीय एवं नियमित रैखिक रूपान्तरण, रैखिक रूपान्तरण का परिवर्त, रैखिक रूपान्तरण का आव्यूह।

सदिश अवकलन: ग्रेडियन्ट, डाइवर्जेंस तथा कर्ल, प्रथम कोटि, सदिश तत्समक, दिक अवकल (अनुप्रयोग के अनुसार)

सदिश समाकलन: रेखीय समाकलन, पृष्ठ समाकलन, आयतन समाकलन, ग्रीन का प्रमेय, गॉस डाइवर्जेंस प्रमेय, स्टोकस प्रमेय (अनुप्रयोग की दृष्टि से)।

रिमान समाकलन: असतत फलनों का समाकलन, परिवर्धन फलन का निम्न एवं उच्च समाकलन, पग फलन एवं चिन्ह फलन का समाकलन।

स्थिति विज्ञान : तीन बलों के अन्तर्गत किसी पिण्ड का सन्तुलन, समतलीय बल, समतलीय बल निकाय के अन्तर्गत सन्तुलन के सामान्य प्रतिबन्ध, गुरुत्व केन्द्र, कामन केटिनरि, घर्षण।

गति विज्ञान : गुरुत्व के अधीन उर्ध्वाधर समतल में प्रक्षेप की गति, कार्य, सामर्थ्य एवं ऊर्जा, चिकने पिण्डों का सीधा संघट्ट, रेडियल एवं ट्रान्सवर्ग वेग तथा त्वरण स्पर्शीय एवं अभिलम्ब गति तथा त्वरण।

त्रिकोणमिति : त्रिकोणमितीय समीकरण, त्रिभुज के गुणधर्म, प्रतिलोम वृत्तीय फलन, ऊँचाई और दूरी, सम्मिश्र संख्यायें, डिमायवर प्रमेय और इसके प्रयोग, इकाई के मूल।

मुख्य (लिखित) परीक्षा हेतु परीक्षा योजना एवं पाठ्यक्रम

प्रथम प्रश्न पत्र	सामान्य हिन्दी एवं निबंध	समय 2 घंटा	पूर्णांक- 100 अंक
द्वितीय प्रश्न पत्र	वैकल्पिक विषय (परम्परागत)	समय 3 घंटा	पूर्णांक- 300 अंक

पाठ्यक्रम

प्रथम खण्ड सामान्य हिन्दी निर्धारित अंक-50

- अपठित गद्यांश का संक्षेपण, उससे सम्बन्धित प्रश्न, रेखांकित अंशों की व्याख्या एवं उसका उपयुक्त शीर्षक।
- अनेकार्थी शब्द, विलोम शब्द, पर्यावाची शब्द, तत्सम एवं तदभव, क्षेत्रीय विदेशी (शब्द भण्डार), वर्तनी, अर्थबोध, शब्द-रूप, संधि, समास, क्रियाएं, हिन्दी वर्णमाला, विराम चिन्ह, शब्द रचना, वाक्य रचना, अर्थ, मुहावरें एवं लोकोक्तियां, उत्तर प्रदेश की मुख्य बोलियां तथा हिन्दी भाषा के प्रयोग में होने वाली अशुद्धियाँ।

द्वितीय खण्ड हिन्दी निबंध निर्धारित अंक-50

इसके अंतर्गत एक खण्ड होगा। इस खण्ड में से एक निबंध लिखना होगा। इस निबंध की अधिकतम विस्तार सीमा 1000 शब्द होगी। निबंध हेतु निम्नवत् क्षेत्र होंगे-

- साहित्य, संस्कृति
- राष्ट्रीय विकास योजनाएं/क्रियान्वयन
- राष्ट्रीय-अंतर्राष्ट्रीय, सामयिक सामाजिक समस्यायें/निदान
- विज्ञान तथा पर्यावरण
- प्राकृतिक आपदायें एवं उनके निवारण
- कृषि, उद्योग एवं व्यापार

(2) वैकल्पिक विषय (Optional Subject) (द्वितीयक प्रश्न पत्र)

परीक्षा योजना-वैकल्पिक विषयों के (परम्परागत) प्रश्न पत्र की रचना हेतु प्रश्न पत्रों के स्वरूप एवं अंकों का विभाजन निम्नवत् है-

- प्रश्नों की कुल संख्या - 20 होगी। सभी प्रश्न अनिवार्य होंगे। सभी प्रश्न खण्डों में विभाजित रहेंगे।

खण्ड अ - के अंतर्गत प्रश्नपत्र में 5 प्रश्न सामान्य उत्तरीय (उत्तरों की शब्द सीमा 250) एवं प्रत्येक प्रश्न 25 अंक का होगा।

खण्ड ब - के अंतर्गत 5 प्रश्न लघुउत्तरीय (उत्तरों की शब्द सीमा 150) एवं प्रत्येक प्रश्न 15 अंक का होगा।

खण्ड स - के अंतर्गत 10 प्रश्न अतिलघु उत्तरीय (उत्तरों की शब्द सीमा 50) एवं प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का होगा।

वैकल्पिक विषय पाठ्यक्रम

वैकल्पिक विषय का पाठ्यक्रम प्रारम्भिक परीक्षा की भांति होगा।

जी.आई.सी. प्रवक्ता परीक्षा, 2021

गणित

व्याख्या सहित हल प्रश्न-पत्र

1. If $f(x) = \frac{4x+5}{x-6}$, $x \neq 6$, then $f^{-1}(x)$ is equal to –

यदि $= \frac{4x+5}{x-6}$, $x \neq 6$, तो $f^{-1}(x)$ का मान है–

- (a) $\frac{5x+6}{x+4}$, $x \neq -4$ (b) $\frac{5x+6}{x-4}$, $x \neq 4$
(c) $\frac{6x+5}{x-4}$, $x \neq 4$ (d) $\frac{6x+5}{x+4}$, $x \neq -4$

Ans. (c) : $\frac{6x+5}{x-4}$; $x \neq 4$

Let $f = A \rightarrow B$ be function defined as $f(x) = \frac{4x+5}{x-6}$;

$x \neq 6$, where, $B = \{y : y = \frac{4x+5}{x-6} \text{ for some } x \in A\}$.

Consider an arbitrary element y of B . By the definition of B , $y = \frac{4x+5}{x-6}$; $x \neq 6$ for some x in the domain A .

This shows that $x = \frac{6y+5}{y-4}$. Define $g: B \rightarrow A$ by

$g(y) = \frac{6y+5}{y-4}$; $y \neq 4$. Now, $\text{gof}(x) = g(f(x)) =$

$g\left(\frac{4x+5}{x-6}\right) = x$ and $\text{fog}(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{6y+5}{y-4}\right) = y$.

This shows that $\text{gof} = I_A$ and $\text{fog} = I_B$, which implies that f is invertible and g is the inverse of f .

2. If R be the set of real numbers, which of the following is one-one?

यदि R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो, तो निम्नलिखित फलनों में से कौन एकैकी है?

- (a) $f: R \rightarrow R$, $f(x) = \sin x$
(b) $g: R \rightarrow R$, $g(x) = \cos x$
(c) $h: R \rightarrow R$, $h(x) = e^x$
(d) $f_1: R \rightarrow R$, $f_1(x) = a$, where 'a' is a constant/
 $f_1: R \rightarrow R$, $f_1(x) = a$ जहाँ, a एक नियतांक है।

Ans. (c) : $h: R \rightarrow R$, $h(x) = e^x$

(a) $f: R \rightarrow R$, $f(x) = \sin x$ is not one-one because sine function is periodic with period 2π i.e. $\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta$; $\forall \theta \in R$.

(b) $g: R \rightarrow R$, $g(x) = \cos x$ is not one-one because cosine function is periodic with period 2π i.e. $\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta$; $\forall \theta \in R$.

(c) $h: R \rightarrow R$, $h(x) = e^x$ is one-one because $h'(x) = e^x > 0$, $\forall \theta \in R$ which implies $h(x) = e^x$ is an increasing function.

(d) $f_1: R \rightarrow R$, $f_1(x) = a$ is not one-one as f_1 is constant $\forall x \in R$

3. Let R be a relation on a set A such that $R = R^{-1}$, then R is-

समुच्चय A पर एक संबंध R इस प्रकार है, कि $R = R^{-1}$ तो है–

- (a) Reflexive/स्वतुल्य
(b) Symmetric/सममित
(c) Transitive/संक्रामक
(d) None of these/उपर्युक्त में से कोई नहीं

Ans. (b) : Symmetric

Let $(a, b) \in R$; $a, b \in A$. Then $(b, a) \in R^{-1}$ and because $R = R^{-1}$ we must have $(b, a) \in R$. Thus for every $(a, b) \in R$ we must have $(b, a) \in R$ for all $a, b \in A$.

Hence, R is symmetric.

4. Let R be the set of real numbers, if

$f: R \rightarrow R$ is given by $f(x) = x^2 + 2$ and

$g: R \rightarrow R$ is given by $g(x) = \frac{x}{x-1}$, then the

value of $(\text{gof})(x)$ is –

माना R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है, यदि $f: R \rightarrow R$, $f(x) = x^2 + 2$ से दिया जाये और

$g: R \rightarrow R$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, से दिया जाये, तो (gof)

(x) का मान होगा।

- (a) $\frac{x^2+2}{x^2+1}$ (b) $\frac{x^2+2}{(x-1)}$
(c) $\frac{x^2+1}{x^2+2}$ (d) $\frac{x^2+2}{(x+1)^2} \cdot R$

Ans. (a) : $\frac{x^2+2}{x^2+1}$

$\text{gof}: R \rightarrow R$ is defined by

$$g(f(x)) = \frac{(x^2+2)}{(x^2+2)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1}$$

5. A binary operation on a non-empty set G is a mapping-

किसी अरिक्त समुच्चय G पर एक द्विधारी संक्रिया का एक प्रतिचित्रण है–

- (a) from G to G/G से G पर
(b) from $G \times G$ to G/G से G पर
(c) from $R \times G$ to G/G से G पर
(d) from $R \times G$ to R ,
where R is the set of real numbers.
जहाँ R वास्तविक का समुच्चय है।

Ans. (b) : from $G \times G$ to G

A binary operation $*$ on a non-empty set G is a mapping from $G \times G$ to G i.e. $*$: $G \times G \rightarrow G$.

6. Let a relation R be defined on the set of non-zero rational number Q^* by aRb . If $a = \frac{1}{b}$, then this relation R over Q^* is
माना अशून्य परिमेय संख्याओं के समुच्चय Q^* पर एक सम्बन्ध R, aRb द्वारा परिभाषित है।

यदि $a = \frac{1}{b}$, तब Q^* पर यह संबंध R –

- reflexive, but not symmetric and transitive स्वतुल्य है, किन्तु सममित और संक्रामक नहीं है
- symmetric, but not reflexive and transitive सममित है, किन्तु स्वतुल्य और संक्रामक नहीं है।
- transitive, but not reflexive and symmetric संक्रामक है, किन्तु स्वतुल्य और सममित नहीं है
- reflexive and transitive, but not symmetric स्वतुल्य और संक्रामक है, किन्तु सममित नहीं है

Ans. (b) : symmetric, but not reflexive and transitive
Reflexive - For every non-zero rational number $a \neq 1$ we have $a \neq 1/a$

Symmetric - If aRb ; $a, b \in Q^*$ then we have

$$a = 1/b$$

$$\Rightarrow ab = 1$$

$$\Rightarrow b = 1/a$$

$$\Rightarrow bRa ; a, b \in Q^*$$

Transitive - If aRb and bRc ; $a, b, c \in Q^*$ then we have $a = 1/b$ and $b = 1/c$ which implies $a = c$.

7. If A is a square matrix of order n, then value of $\text{adj}(\text{adj} A)$ is-यदि A कोई वर्ग आव्यूह है जिसकी कोटि n है, तो $\text{adj}(\text{adj} A)$ का मान है।

$$(a) |A|^n A$$

$$(b) |A|^{n-1} A$$

$$(c) |A|^{n-2} A$$

(d) None of these/इनमें से कोई नहीं

Ans. (c) : $|A|^{n-2} A$.

Let A be any given square matrix of order n, $|A|$ denote the determinant of A then

$$A(\text{adj} A) = (\text{adj} A)A = |A|I$$

where I is the identity matrix of order n.

Now, for a square matrix of order n, $(\text{adj} A)$ we have

$$\text{adj} A (\text{adj}(\text{adj} A)) = |\text{adj} A| I$$

$$\Rightarrow A \text{adj} A (\text{adj}(\text{adj} A)) = A |A|^{n-1} I ; |\text{adj} A| = |A|^{n-1}$$

$$\Rightarrow |A| \cdot I (\text{adj}(\text{adj} A)) = A |A|^{n-1} I$$

$$\Rightarrow \text{adj}(\text{adj} A) = |A|^{n-2} A$$

8. If $3A - 2B = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ and $2A - B = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$ then A is-

$$\begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{यदि } 3A - 2B = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \text{ और } 2A - B = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$$

तो A है।

$$(a) \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 10 & -11 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} -10 & 11 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

(d) None of these/इनमें से कोई नहीं

$$\text{Ans. (b) : Given } 3A - 2B = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} \text{ —(i)}$$

$$\text{and } 2A - B = \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} \text{ —(ii)}$$

We have

$$4A - 2B - 3A + 2B = \begin{bmatrix} 16 & -20 \\ 16 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{or } A = \begin{bmatrix} 10 & -11 \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

9. If a matrix $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ is expressed as $A+B$,

where A is symmetric and B is skew - symmetric, then B is equal to -

$$\text{यदि आव्यूह } \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix} \text{ को } A+B \text{ के रूप में व्यक्त}$$

किया जाये, जहाँ A सममित और B विषम सममित है, तो B का मान है—

$$(a) \begin{bmatrix} 5 & 11/2 & 7/2 \\ 11/2 & 2 & 11/2 \\ 7/2 & 11/2 & 9 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 5/2 \\ -5/2 & 0 & -3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & -5/2 \\ 5/2 & 0 & 3/2 \\ 5/2 & -3/2 & 0 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 5 & 11/2 & 7/2 \\ 11/2 & 2 & 11 \\ 7/2 & 11 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ans. (b) : Given } P = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Then } P' = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

We know that, square matrix is sum of symmetric and skew symmetric matrix

$$\text{Then, } A + B = \frac{1}{2}(P + P') + \frac{1}{2}(P - P')$$

$$B = \frac{1}{2}(P - P')$$

$$B = \frac{1}{2} \left[\begin{bmatrix} 5 & 8 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 8 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ -5 & 0 & -3 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 5/2 \\ -5/2 & 0 & -3/2 \\ -5/2 & 3/2 & 0 \end{bmatrix}$$

10. What can be said about the solution of the following system of linear equations?

$$x + y + 2z = 4$$

$$2x - y + 3z = 6$$

$$x - y - z = 1$$

रैखिक समीकरणों के निम्नलिखित निकाय के हल के बारे में क्या कहा जा सकता है?

$$x + y + 2z = 4$$

$$2x - y + 3z = 6$$

$$x - y - z = 1$$

- (a) It has a unique non-zero solution

इसका अद्वितीय अशून्य हल है।

- (b) It has infinitely many solutions

इसके अनन्त हल हैं।

- (c) It has no solution

इसका हल नहीं है।

- (d) None of the above is true

उपर्युक्त में से कोई नहीं भी सत्य नहीं है।

Ans. (a) : It has a unique non-zero solution.

Given system can be described in matrix form as

$$AX = b \text{ i.e. } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Now } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ is non-singular because } \det(A)$$

$= 7 \neq 0$ and hence invertible and A^{-1} exists

Then $AX = b$ gives

$$\text{or } A^{-1}(AX) = A^{-1}b \quad (\text{pre multiplying by } A^{-1})$$

$$\text{or } (A^{-1}A)X = A^{-1}b$$

$$\text{or } IX = A^{-1}b$$

$$\text{or } X = A^{-1}b$$

This matrix equation provides unique solution for the given system of equations as inverse of a matrix is unique.

11. The value of the determinant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$ is

सारणिक $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$ का मान है—

(a) $(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$

(b) $(x - y)(y - z)(z - x)(x + y - z)$

(c) $xyz(x + y + z)$

(d) $(xy + yz + zx)(x^2 + y^2 + z^2)$

Ans. (a) : $(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^3-y^3 & y^3-z^3 & z^3 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} (C_1 \rightarrow C_1 - C_2) \\ (C_2 \rightarrow C_2 - C_3) \end{cases}$$

$$\Delta = (x-y)(y-z) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & z \\ x^2+y^2+xy & y^2+z^2+zy & z^3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (x-y)(y-z)(y^2+z^2+zy-x^2-y^2-xy)$$

$$\Delta = (x-y)(y-z)(z^2-x^2+y(z-x))$$

$$\Delta = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z).$$

12. The value of the determinant $\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}$ is-

सारणिक $\begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}$ का मान है।

(a) $(x + y)(y + z)(z + x)$ (b) xyz

(c) 1 (d) 0

Ans. (d) : 0

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+y & z & 1 \\ y+z & x & 1 \\ z+x & y & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x+y+z & z & 1 \\ x+y+z & x & 1 \\ x+y+z & y & 1 \end{vmatrix} \quad (C_1 \rightarrow C_1 + C_2)$$

$$\Rightarrow \Delta = (x + y + z) \begin{vmatrix} 1 & z & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ because } C_1 \text{ and } C_3 \text{ are identical}$$

13. The harmonic mean of the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$ is-समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूलों का हरात्मक माध्य है-

(a) $-\frac{2c}{b}$ (b) $\frac{2c}{b}$ (c) $\frac{c}{b}$ (d) $-\frac{c}{b}$

Ans. (a) : $-2c/b$

Let α, β be the roots of $ax^2 + bx + c = 0$, then

$$\alpha + \beta = -b/a$$

$$\text{and } \alpha\beta = c/a$$

$\therefore$ Harmonic mean of α and β is

$$\frac{2}{1/\alpha + 1/\beta} = \frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta} = \frac{2c/a}{-b/a} = \frac{-2c}{b}$$

14. Find the condition that the roots of the cubic equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ be in a geometric progression-

वह शर्त ज्ञात कीजिए ताकि त्रिघाती समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ के मूल गुणोत्तर श्रेणी में हों-

(a) $p + q - r = 0$

(b) $q^3r - p^3 = 0$

(c) $p^3r - q^3 = 0$

(d) $p - q + r = 0$

Ans. (c) : $p^3r - q^3 = 0$

Let $\alpha, \alpha R, \alpha R^2$, be roots of $x^3 - px^2 + qx - r = 0$.

Then $\alpha + \alpha R + \alpha R^2 = p$... (i)

$\alpha^2 R + \alpha^2 R^3 + \alpha^2 R^2 = q$... (ii)

and $\alpha^3 R^3 = r$... (iii)

Now form (ii) $\alpha R (\alpha + \alpha R + \alpha R^2) = q$

$$\Rightarrow \alpha R(p) = q$$

$$\Rightarrow \alpha^3 R^3 (p^3) = q^3 \Rightarrow p^3 r - q^3 = 0$$

15. The roots of the equation $\log_4 (x^2 - 6x + 24) = 2$ are-
समीकरण $\log_4 (x^2 - 6x + 24) = 2$ के मूल हैं-
(a) 2, 3 (b) 4, 6
(c) 1, 5 (d) 2, 4

Ans. (d) : 2, 4
Given $\log_4 (x^2 - 6x + 24) = 2$
 $\Rightarrow x^2 - 6x + 24 = 4^2$
 $\Rightarrow x^2 - 6x + 24 = 16$
 $\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 4x - 2x + 8 = 0$
 $\Rightarrow (x-4)(x-2) = 0$
 $\Rightarrow x = 2, 4$

16. The sum of the roots of the equation $x^2 - 4|x - 2| - 4x + 8 = 0$ is
समीकरण $x^2 - 4|x - 2| - 4x + 8 = 0$ के मूलों का योगफल है-
(a) 8 (b) 9
(c) 6 (d) 4

Ans. (a) : 8
Given $x^2 - 4|x - 2| - 4x + 8 = 0$
Case I. If $x > 2$ then equation becomes
 $x^2 - 4(x - 2) - 4x + 8 = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 4x + 8 - 4x + 8 = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$
 $\Rightarrow \text{Sum of roots} = 8$
Case II. If $x < 2$ then equation becomes
 $x^2 + 4(x - 2) - 4x + 8 = 0$
 $\Rightarrow x^2 + 4x - 8 - 4x + 8 = 0$
 $x^2 = 0$
Sum of roots = 0
Hence, sum of roots of $x^2 - 4|x - 2| - 4x + 8 = 0$ is 8

17. What is the probability that a leap year, selected at random, will have 53 Sundays?
यादृच्छया चुने गये किसी अधिवर्ष में 53 रविवार होने की प्रायिकता क्या है?
(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{5}{7}$
(c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{4}{7}$

Ans. (c) : $\frac{2}{7}$
A leap year has 366 days, that consists of 52 weeks and 2 days. A leap year has at least 52 Sundays.
The remaining 2 days can be any one of the following
{ {Sunday, Monday}, {Monday, Tuesday}
{Tuesday, Wednesday}, {Wednesday, Thursday}
{Thursday, Friday}, {Friday, Saturday}
{Saturday, Sunday} }
Hence, P(a leap year has 53 Sundays) = $\frac{2}{7}$

18. If a coin is tossed three times, then the probability of getting at least one tail is-
यदि किसी सिक्के को तीन बार उछाला जाता है, तो कम से कम एक पुच्छ आने की प्रायिकता है-
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{3}{8}$ (d) $\frac{7}{8}$

Ans. (d) : $\frac{7}{8}$
P(Getting at least one tail in three tosses)
 $= 1 - P(\text{getting head in all three tosses})$
 $= 1 - 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1 - 1/8 = 7/8$

19. If A and B are two events such that $P(A) = \frac{1}{3}$,
 $P(B) = \frac{1}{4}$ and $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, then the value of $P(A|\bar{B})$ is-
यदि A एवं B दो घटनायें इस प्रकार हैं, कि $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ एवं $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, हो, तो $P(A|\bar{B})$ का मान है।
(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$

Ans. (c) : $\frac{1}{3}$
We have $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$
 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$
 $= \frac{4+3-6}{12}$
 $= \frac{1}{12}$
Now observe that $P(A \cap B) = \frac{1}{12} = P(A).P(B)$ which implies that A and B are independent events and so A and $\bar{B}$ are independent events as well.
That gives
 $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A).P(\bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A) = \frac{1}{3}$

20. Which function is not discontinuous at $x = 0$?
कौन सा फलन $x = 0$ पर असतत नहीं है?
(a) $\sin(1/x)$ (b) $1/x^2$
(c) $\tan^{-1}(1/x)$ (d) $\tan x$

Ans. (d) : $\tan x$.
(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ dose not exist
If $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ and $y_n = \frac{1}{(2n\pi + \pi/2)}$ then $\lim(x_n) = \lim(y_n) = 0$
However, $\sin(1/x_n) = 0$ for all $n \in \mathbb{N}$ while $\sin(1/y_n) = 1$. Thus, $\lim \sin(1/x_n) \neq \lim \sin(1/y_n)$
So, $\sin(1/x)$ dose not exist and hence $\sin(1/x)$ is discontinuous at $x = 0$
(ii) $1/x^2$ is discontinuous at $x = 0$
(iii) $\tan^{-1}(1/x)$ is discontinuous at $x = 0$ (similarly proceed as in the case of $\sin(1/x)$)
(iv) $\tan x$ is continuous at $x = 0$ because $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ and $\sin x$ and $\cos x$ both are continuous at $x = 0$.

21. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ is equal to -

$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$ के बराबर है-

- (a) 1/e (b) e
(c) 1 (d) e-1

Ans. (b) : e

Let $y = (1+x)^{1/x}$

Taking logarithm we have

$$\log_e y = 1/x \log_e (1+x)$$

Taking limit on both sides we have

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_e y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e (1+x)}{x} \quad [0/0 \text{ form}]$$

$$\Rightarrow \log_e \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x} \right) \quad [\text{L' Hospital's Rule}]$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} y = e$$

22. When we expand $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)$ in powers of θ ,

the coefficient of $\frac{\theta^3}{3!}$ is-

जब हम $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right)$ का प्रसार θ की घातों में करते

हैं, तो $\frac{\theta^3}{3!}$ का गुणांक है-

- (a) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

Ans. (a) : $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{We have } \sin \left(\frac{\pi}{4} + \theta \right) = \sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots + 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\theta^2}{2!} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\theta^3}{3!} \dots$$

$$\text{So, coefficient of } \frac{\theta^3}{3!} \text{ is } -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

23. Writing Lagrange's mean value theorem as $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, $a < c < b$, the value of c ,

if $f(x) = x(x-1)$, $a=0$, $b=\frac{1}{2}$ is-

लैग्रान्ज के मध्य मान प्रमेय को

$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$, $a < c < b$ लिखने पर, c

का मान, यदि $f(x) = x(x-1)$, $a=0$, $b=\frac{1}{2}$, है-

- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{6}$

Ans. (a) : 1/4

The function $f(x) = x(x-1)$ is continuous in $[0, 1/2]$ and differentiable in $(0, 1/2)$ as its derivative $f'(x) = 2x - 1$ is defined in $(0, 1/2)$.

Now, $f(1/2) = -1/4$ and $f(0) = 0$.

$$\text{Hence, } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{-1/4 - 0}{1/2 - 0} = -1/2$$

Now, by Lagrange's Mean Value theorem there is a point $c \in (0, 1/2)$ such that $f'(c) = -1/2$ then

$$2c - 1 = -1/2 \Rightarrow c = 1/4$$

24. If $u = f(y/x)$, then the value of $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ is -

यदि $u = f(y/x)$ हो, तो $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ का मान है-

- (a) 0 (b) u
(c) $2u$ (d) $x + y$

Ans. (a) : 0

We have $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\text{and } \frac{\partial u}{\partial y} = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\text{Thus } x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

25. The value of $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$ is-

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$ का मान है-

- (a) ab (b) $\frac{a+b}{2}$
(c) $\sqrt{ab}$ (d) $a + b$

Ans. (c) : $\sqrt{ab}$

$$\text{Let } y = \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{1/x}$$

Taking logarithm on both sides we have

$$\log_e y = 1/x \log_e \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)$$

Taking limit on both sides we have

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_e y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)}{x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ form} \right]$$

$$\Rightarrow \log_e \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{a^x + b^x} (a^x \log_e a + b^x \log_e b)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} y = e^{\log_e(ab)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = \sqrt{ab}$$

26. If $u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, then the value of

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ is -}$$

यदि $u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ तो

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ का मान है।}$$

- (a) $u/4$ (b) $4u$ (c) $-\frac{u}{4}$ (d) $\frac{u^2}{4}$

Ans. (c) : $-\frac{u}{4}$

Given $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{x} \left(1 + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$ is a homogeneous function of x, y of degree $\frac{1}{2}$. Therefore by Euler's theorem on Homogeneous functions we have

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) u = -\frac{u}{4}$$

27. The function $\sin^p \theta \cos^q \theta$ attains its maximum value, when-

फलन $\sin^p \theta \cos^q \theta$ अपना महत्तम मान प्राप्त करता है, जब-

- (a) $\theta = \tan^{-1} \sqrt{p/q}$ (b) $\theta = \tan^{-1} \sqrt{q/p}$
(c) $\theta = \tan^{-1} (p/q)$ (d) $\theta = \tan^{-1} (q/p)$

Ans. (a) : $\theta = \tan^{-1} \sqrt{p/q}$

Given $f(\theta) = \sin^p \theta \cos^q \theta$

Upon differentiating w.r.t. θ , we have

$$f(\theta) = p \sin^{p-1} \theta \cos^q \theta - q \sin^p \theta \cos^{q-1} \theta = \sin^{p-1} \theta \cos^{q-1} \theta (p \cos^2 \theta - q \sin^2 \theta)$$

Now $f(\theta) = 0 = \sin^{p-1} \theta \cos^{q-1} \theta (p \cos^2 \theta - q \sin^2 \theta)$ gives

Either $\theta = 0, \pi, 2\pi$, when $\sin^{p-1} \theta = 0$

or $\theta = \pi/2, 3\pi/2$, when $\cos^{q-1} \theta = 0$

or $\theta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{p}{q}}$, when $p \cos^2 \theta - q \sin^2 \theta = 0$

as critical points of the function $f(\theta)$

Clearly $\theta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{p}{q}}$ is the point of maxima.

28. The value of $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n^2 - r^2)}}$ is-

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n^2 - r^2)}} \text{ का मान है}$$

- (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) π (d) $\frac{\pi}{3}$

Ans. (a) : $\pi/4$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - r^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} f\left(\frac{r}{n}\right) \frac{1}{n} = \int_a^b f(x) dx$$

Now let $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{n}\right)^2}}$, $\frac{1}{n} = dx$ and thus $a=0, b=1$

$$\text{Then } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{n}\right)^2}} \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \left[\tan^{-1}(x) \right]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \pi/4.$$

29. An appropriate substitution for the integral

$$\int \frac{1 + x^{1/2}}{1 + x^{1/3}} dx \text{ is - समाकल } \int \frac{1 + x^{1/2}}{1 + x^{1/3}} dx \text{ के लिए}$$

उपयुक्त प्रतिस्थापन है-

- (a) $x = t^2$ (b) $x = t^3$
(c) $x = t^6$ (d) $x = t^{12}$

Ans. (c) : $x = t^6$

Substituting $x = t^6$ in the integral we have
& $dx = 6t^5 dt$

$$\int \frac{1 + x^{1/2}}{1 + x^{1/3}} dx = \int \frac{1 + t^3}{1 + t^2} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^5 + t^8}{1 + t^2} dt$$

which can be integrated using partial fractions

30. The value of the integral $\int_4^7 \frac{x^{10}}{x^{10} + (11-x)^{10}} dx$ is-

$$\text{समाकल } \int_4^7 \frac{x^{10}}{x^{10} + (11-x)^{10}} dx \text{ का मान है-}$$

- (a) 3 (b) 3^{10} (c) $7^{10} - 4^{10}$ (d) $\frac{3}{2}$

Ans. (d) : $3/2$

$$\text{Given } I = \int_4^7 \frac{x^{10} dx}{x^{10} + (11-x)^{10}}$$

Then, by $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$ we have

$$I = \int_4^7 \frac{(11-x)^{10} dx}{(11-x)^{10} + x^{10}}$$

$$\Rightarrow 2I = \int_4^7 \frac{x^{10} + (11-x)^{10} dx}{x^{10} + (11-x)^{10}}$$

$$2I = \int_4^7 dx$$

$$2I = [x]_4^7$$

$$I = 3/2$$

31. The area of the circle $x^2 + y^2 = 14x$ is-

वृत्त $x^2 + y^2 = 14x$ का क्षेत्रफल है-

- (a) 208 sq. unit/208 वर्ग इकाई
(b) 516 sq. unit/516 वर्ग इकाई
(c) 108 sq. unit/108 वर्ग इकाई
(d) 154 sq. unit/154 वर्ग इकाई

Ans. (d) : 154 sq. unit.

Given equation of circle

$$x^2 + y^2 = 14x$$

$$\text{or } (x-7)^2 + y^2 = 49$$

So, radius of the circle is 7 units.

Then area of the circle = $\pi(7)^2 = 154$ sq. unit.

32. The value of the integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{(\sin x) dx}}{\sqrt{(\sin x)} + \sqrt{(\cos x)}} \text{ is}$$

समाकल $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{(\sin x) dx}}{\sqrt{(\sin x)} + \sqrt{(\cos x)}} \text{ का मान है-}$

- (a) π (b) $\frac{3\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

Ans. (a) : $\pi/4$

$$\text{Given } I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}$$

Then, by $\int_0^b f(x) dx = \int_0^b f(a-x) dx$ we have

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(\pi/2-x)} dx}{\sqrt{\sin(\pi/2-x)} + \sqrt{\cos x(\pi/2-x)}} \\ I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x} dx}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \\ \Rightarrow 2I &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} dx}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \\ 2I &= \int_0^{\pi/2} dx \\ 2I &= [x]_0^{\pi/2} \\ 2I &= \pi/2 \\ I &= \pi/4 \end{aligned}$$

33. The value of the integral $\int \left(u \frac{d^2 v}{dx^2} - v \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx$ is-

समाकल $\int \left(u \frac{d^2 v}{dx^2} - v \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx \text{ का मान है-}$

- (a) $\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dx}$ (b) $u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
(c) $u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}$ (d) $\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}$

Ans. (c) : $u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}$

$$\int \left(u \frac{d^2 v}{dx^2} - v \frac{d^2 u}{dx^2} \right) dx$$

$$\Rightarrow \int u \frac{d^2 v}{dx^2} dx - \int v \frac{d^2 u}{dx^2} dx$$

Now on integrating by parts we have

$$\Rightarrow u \frac{dv}{dx} - \int \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - v \frac{du}{dx} + \int \frac{dv}{dx} \frac{du}{dx} dx$$

$$\Rightarrow u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx}$$

34. The value of the integral

$$\int_{1/4}^{3/4} \frac{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x}{2 \cos^{-1} x + 3 \sin^{-1} x + \sin^{-1}(1-x)} dx \text{ is-}$$

समाकल $\int_{1/4}^{3/4} \frac{\frac{\pi}{2} + \sin^{-1} x}{2 \cos^{-1} x + 3 \sin^{-1} x + \sin^{-1}(1-x)} dx$

का मान है-

- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{8}$
(c) $\frac{3}{4}$ (d) 1

Ans. (a) : $1/4$

$$I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{\pi/2 + \sin^{-1}(x) dx}{2 \cos^{-1} x + 3 \sin^{-1} x + \sin^{-1}(1-x)}$$

$$I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{\pi/2 + \sin^{-1}(x) dx}{\pi + \sin^{-1}(x) + \sin^{-1}(1-x)}$$

($\because \sin^{-1} + \cos^{-1} x = \pi/2$)

Then by $\left[\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx \right]$ we have

$$I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{\pi/2 + \sin^{-1}(1-x) dx}{\pi + \sin^{-1}(1-x) + \sin^{-1}(x)}$$

$$\Rightarrow 2I = \int_{1/4}^{3/4} \frac{\pi + \sin^{-1}(x) + \sin^{-1}(1-x) dx}{\pi + \sin^{-1}(x) + \sin^{-1}(1-x)}$$

$$2I = \int_{1/4}^{3/4} dx$$

$$2I = [X]_{1/4}^{3/4}$$

$$I = 1/4$$

35. The order and degree of the differential equation-

$$f(x, y) \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right)^p + \phi(x, y) \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right)^q + \dots = 0 \text{ are}$$

respectively-

अवकल समीकरण-

$$f(x, y) \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right)^p + \phi(x, y) \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right)^q + \dots = 0 \text{ की}$$

कोटि और घात क्रमशः हैं-

- (a) p and m/p और m
(b) m and p/m और p
(c) p and q/p और q
(d) q and p/q और p

Ans. (b) : m and P

Given differential equation has order m and degree P. Order of differential equation is the order of highest order derivative.

Degree of differential equation is the degree of highest order derivative.

36. The general solution of differential equation

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y} \text{ is}$$

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2 e^{-y}$ का व्यापक हल है-

- (a) $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$ (b) $e^y = e^x + \frac{x^3}{3}$
(c) $y = x + e^{x^{3/3}} + c$ (d) $e^x = e^y + \frac{y^3}{3} + c$

Ans. (a) : $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$

Given $\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^{-y} + x^2 e^{-y}$

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} (e^x + x^2)$$

On separating the variables and integrating we have

$$\int e^y dy = \int (e^x + x^2) dx$$

$$= e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$$

37. An integrating factor of the differential

equation $\frac{dy}{dx} = y \tan x - 2 \sin x$ is -

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = y \tan x - 2 \sin x$ का समाकलन गुणनखण्ड है-

- (a) $\sec x$ (b) $\cos x$
(c) $\sin x$ (d) $\tan x$

Ans. (a) : $\cos x$

Given differential equation can be written as

$$\frac{dy}{dx} - y \tan x = -2 \sin x$$

$\therefore$ An integrating factor (IF) = $e^{-\int \tan x dx} = e^{\log_e(\sec x)^{-1}}$

$$= \frac{1}{\sec x} = \cos x$$

38. The solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^3 \text{ is-}$$

अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^3$ का हल है-

- (a) $3y = x(x^3 + c)$ (b) $y = x(x^3 + c)$
(c) $y^2 = x(x^3 + c)$ (d) $y = x^2(x^3 + c)$

Ans. (a) : $3y = x(x^3 + c)$

Given $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^3$

Where $P = -1/x$, $Q = x^3$

$$I.F = e^{\int \frac{-1}{x} dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$$

$$y \cdot I.F = \int Q \cdot I.F dx$$

$$y \cdot \frac{1}{x} = \int x^3 \times \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{y}{x} = \frac{x^3}{3} + c$$

$$3y = x(x^3 + c)$$

is the required solution

39. The equation $xy = 1$ represents-
समीकरण $xy = 1$ निरूपित करता है-

- (a) a pair of straight lines/एक सीधी रेखा - युग्म
(b) a parabola/एक परवलय
(c) an ellipse/एक दीर्घवृत्त
(d) a hyperbola/एक अतिपरवलय

Ans. (d) : A hyperbola

On comparing $xy = 1$ with

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

We have $a = 0$, $h = 1/2$, $b = 0$, $g = f = 0$, $c = -1$

Then $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 1/4 \neq 0$ and $h^2 > ab$

Therefore $xy = 1$ represents a hyperbola.

40. The equation of the circle described on the line joining the points $(-1, -2)$ and $(1, 3)$ as diameter is-

बिन्दुओं $(-1, -2)$ और $(1, 3)$ को मिलाने वाली रेखा को व्यास मानकर खींचे गये वृत्त का समीकरण है-

- (a) $x^2 + y^2 - y - 7 = 0$
(b) $x^2 + y^2 = 7$
(c) $x^2 + y^2 - y - 6 = 0$
(d) $x^2 + y^2 - x - 7 = 0$

Ans. (a) : $x^2 + y^2 - y - 7 = 0$

Equation of circle

$$(x+1)(x-1) + (y+2)(y-3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 + y^2 - y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - y - 7 = 0$$

41. How many normals can be drawn from a given point to a given parabola?

एक दिए गए बिन्दु से किसी दिए गए परवलय पर कितने अभिलम्ब खींचे जा सकते हैं?

- (a) 2 (b) 3
(c) 4 (d) 6

Ans. (b) : 3

Equation of normal to the parabola

$$y = mx - 2am - am^3$$

Which is cubic in m . Thus 3 normal can be drawn to a parabola from a given point

42. What is the equation of the chord of the circle $x^2 + y^2 = 49$, whose end point is $(-4, 5)$?

वृत्त $x^2 + y^2 = 49$ की उस जीवा का समीकरण क्या है, जिसका मध्य-बिन्दु $(-4, 5)$ है?

- (a) $4x - 5y - 41 = 0$ (b) $4x + 5y + 41 = 0$
(c) $4x - 5y + 41 = 0$ (d) $5x - 4y + 41 = 0$

Ans. (c) : $4x - 5y + 41 = 0$

Given circle $x^2 + y^2 = 49$ has the centre $O(0,0)$. Slope of the line joining center of the circle and mid-point $(-4, 5)$ of the chord which is perpendicular to the chord is given by

$$m = -5/4$$

Thus, slope of the chord $m_c = 4/5$

$\therefore$ Equation of chord passing through $(-4, 5)$ and slope $4/5$ is

$$4x - 5y + 41 = 0$$

43. The value of $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ is-

$\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है-

- (a) 0 (b) 1
(c) 2 (d) 3

Ans. (d) : 3

$$\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{k} \times \hat{i}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$$

$$\Rightarrow \hat{i} \cdot \hat{i} + \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k}$$

$$\Rightarrow 1+1+1=3$$

44. The unit normal to the surface $x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 2 = 0$ at the point (1, 1, 1) is

सतह $x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 2 = 0$ के बिन्दु (1, 1, 1) पर इकाई अभिलम्ब है-

- (a) $\frac{1}{\sqrt{26}}(\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k})$ (b) $\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}$
 (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (d) $\frac{1}{\sqrt{11}}(\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})$

Ans. (a) : $\frac{1}{\sqrt{26}}(\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k})$

Given $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - 3z^2 - 2 = 0$

A vector normal to a surface $f(x, y, z) = 0$ at point (x, y, z) is the gradient of $f(x, y, z)$ at (x, y, z)

$$\therefore \text{Unit normal} = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \frac{\Delta f}{|\Delta f|} = \frac{2x\hat{i} + 8y\hat{j} - 6z\hat{k}}{\sqrt{4x^2 + 64y^2 + 36z^2}}$$

$$\text{At } (1, 1, 1), \frac{\Delta f}{|\Delta f|} = \frac{2\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}}{\sqrt{4 + 64 + 36}} = \frac{2(\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k})}{\sqrt{104}} \\ = \frac{1}{\sqrt{26}}(\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k})$$

45. If $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $\vec{r} = |\vec{r}|$ then the value of $\text{curl}(\vec{r}^n \vec{r})$, is-

यदि $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ और $\vec{r} = |\vec{r}|$ हो, तो $\text{curl}(\vec{r}^n \vec{r})$ का मान है-

- (a) $\vec{0}$ (b) $n \vec{r}^{n-2}$
 (c) $n \vec{r}^{n-1}$ (d) $(n+3) \vec{r}^n$

Ans. (a) : 0

Given $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\text{Now } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\text{Similarly } \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \text{ and } \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\text{And } \vec{r}^n \vec{r} = r^n x\hat{i} + r^n y\hat{j} + r^n z\hat{k}$$

$$\text{curl}(\vec{r}^n \vec{r}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ r^n x & r^n y & r^n z \end{vmatrix} \\ = \hat{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} r^n z - \frac{\partial}{\partial z} r^n y \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial}{\partial x} r^n z - \frac{\partial}{\partial z} r^n x \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} r^n y - \frac{\partial}{\partial y} r^n x \right) \\ = \hat{i} \left(z r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial y} - y r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(z r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x} - x r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(y r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x} - x r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial y} \right)$$

$$+ \hat{k} \left(y r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial x} - x r^{n-1} \frac{\partial r}{\partial y} \right)$$

Now putting $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$; $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ and $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$ in above gives

$$\text{curl}(\vec{r}^n \vec{r}) = \hat{i} (y z r^{n-2} - y z r^{n-2}) - \hat{j} (x z r^{n-2} - x z r^{n-2}) + \hat{k} (x y r^{n-2} - x y r^{n-2})$$

46. If $\vec{r} = (a \sin t) \hat{i} + (a \cos t) \hat{j} + (a \tan t) \hat{k}$

then the value of $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|$ is-

यदि $\vec{r} = (a \sin t) \hat{i} + (a \cos t) \hat{j} + (a \tan t) \hat{k}$

हो, तो $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right|$ का मान है-

- (a) $a^2 \cos \theta$ (b) $a^2 \sin \theta$
 (c) $a^2 \tan \theta$ (d) $a^2 \sec \theta$

Ans. (d) : $a^2 \sec \theta$

$$\vec{r} = (a \sin t) \hat{i} + (a \cos t) \hat{j} + (a \tan t) \hat{k}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (a \cos t) \hat{i} + (-a \sin t) \hat{j} + (a \sec^2 t) \hat{k}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (-a \sin t) \hat{i} + (-a \cos t) \hat{j} + 0 \hat{k}$$

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a \cos t & -a \sin t & a \sec^2 t \\ -a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i} (a^2 \cos t \tan t) - \hat{j} (a^2 \sin t \tan t) + \hat{k} (-a^2 \cos^2 t - a^2 \sin^2 t) \\ = \hat{i} (a^2 \cos t \tan t) - \hat{j} (a^2 \sin t \tan t) + \hat{k} (-a^2)$$

$$\therefore \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right| = \sqrt{a^4 \cos^2 t \tan^2 t + a^4 \sin^2 t \tan^2 t + a^4} \\ = \sqrt{a^4 \tan^2 t + a^4} \\ = \sqrt{a^4 \sec^2 t} \\ = a^2 \sec t$$

47. A line lying in the yz - plane is inclined at an angle α with z - axis. Its direction cosines are- yz - समतल में स्थित कोई रेखा z- अक्ष के साथ α कोण अन्तरित करती है। इसकी दिक्-कोज्यायें हैं-

- (a) $0, \sin \alpha, \cos \alpha$
 (b) $0 \cos \alpha, \sin \alpha$
 (c) $\sin \alpha, \cos \alpha, 0$
 (d) $\cos \alpha, \sin \alpha, 0$

Ans. (a) : $(0, \sin \alpha, \cos \alpha)$

If the line is in yz- plane making an angle α with the z-axis then its direction cosines are given by

$$(\cos(\pi/2)), \cos \alpha, \cos(\pi/2 - \alpha) \\ \text{or } (0, \cos \alpha, \sin \alpha)$$

48. The equation of the right circular cone, whose vertex is the origin, the axis is the z axis and semi- vertical angle is α , is-

लम्ब वृत्तीय शंकु का समीकरण, जिसका शीर्ष मूलबिन्दु, अक्ष -z अक्ष तथा अर्द्धशीर्ष कोण α हो, होगा-

- (a) $x^2 + y^2 = z^2 \sin^2 \alpha$
 (b) $x^2 + y^2 = z^2 \cos^2 \alpha$
 (c) $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$
 (d) $x^2 + y^2 = z^2 \cot^2 \alpha$

Ans. (c) : $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$

Equation of the right circular cone with its vertex at (α, β, γ) , its axis the line

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

and semi-vertical angle θ is

$$[l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)]$$

$$= (l^2 + m^2 + n^2) [(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2] \cos^2 \theta$$

Now if vertex be at the origin axis be the z-axis and semi-vertical angle is α .

Then we have $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ and $l = 0, m = 0, n = 1$ which gives $z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \cos^2 \alpha$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha$$

49. The distance between the planes $2x + y + z = 1$ and $3x + 6y + 3z = 2$ is-

समतलों $2x + y + z = 1$ और $3x + 6y + 3z = 2$ के बीच की दूरी है-

- (a) $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ (b) $\frac{1}{3\sqrt{6}}$
 (c) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ (d) $\frac{5}{2\sqrt{6}}$

Ans. (*) : Given planes $2x + y + z = 1$ and $3x + 6y + 3z = 2$ are not parallel because $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3}$.

Hence, distance between given planes is 0. So, plane will be intersect.

50. The shortest distance between the lines

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4} \text{ and } \frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5} \text{ is}$$

रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ और

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5} \text{ के बीच की न्यूनतम दूरी है-}$$

- (a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{6}}$
 (c) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ (d) $\frac{5}{\sqrt{6}}$

Ans. (a) : 0

The shortest distance between the lines is

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}}{\sqrt{(15-16)^2 + (12-10)^2 + (8-9)^2}} = 0$$

51. The line $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{5}$ meets the plane $x + 3y - 5z + 4 = 0$ at the point-

रेखा $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+5}{5}$ समतल $x + 3y - 5z + 4 = 0$ से मिलती है-

- (a) $(-1, -1, 0)$ (b) $(1, 1, 0)$
 (c) $(1, 0, 1)$ (d) $(0, -1, -1)$

Ans. (a) : $(-1, -1, 0)$

The line $x = 3t+2, y = 4t+3, z = -5t-5$ intersects the plane $x+3y-5z+4=0$ for t given by

$$(3t+2)+3(4t+3)-5(-5t-5)+4=0$$

$$\Rightarrow 40t+40=0 \Rightarrow t=-1$$

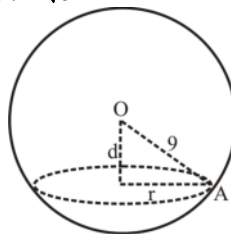
Which gives $x = -3+2 = -1, y = -4+3 = -1$ and $z = 5-5 = 0$ and hence the point of intersection is $(-1, -1, 0)$

52. The radius of the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0, x - 2y + 2z = 3$ is-

वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 8z - 45 = 0, x - 2y + 2z = 3$ की त्रिज्या है-

- (a) 4 (b) $\sqrt{5}$
 (c) $4\sqrt{5}$ (d) $2\sqrt{5}$

Ans. (c) : $4\sqrt{5}$



Given sphere $(x-4)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 81$ has centre $(4, -2, -4)$ and radius is 9.

Now the perpendicular distance of the plane $x-2y+2z=3$ from the center $(4, -2, -4)$ is.

$$d = \frac{|4 - 4 - 8 - 3|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = 1$$

$\therefore$ Radius of the circle in the intersection of plane and sphere is given by

$$r = \sqrt{9^2 - 1^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

53. The general equation of the cone of second degree which passes through the coordinate axes is-निर्देशांक अक्षों से गुजरने वाले द्विघात शंकु का व्यापक समीकरण है-

- (a) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$
 (b) $\sqrt{fx} + \sqrt{gy} + \sqrt{hz} = 0$
 (c) $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx$
 (d) $fyz + gzx + hxy = 0$

Ans. (d) : $fyz + gzx + hxy = 0$

The general equation of a cone with its vertex at the origin is

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

Since X-axis is a generator, its direction cosines 1, 0, 0 satisfy the general equation

This gives $a = 0$. Similarly $b = c = 0$

Then the general equation to a cone which passes through the three axes is

$$fyz + gzx + hxy = 0$$

54. Let R^+ be the multiplicative group of positive real numbers and R be the additive group of real numbers, then the mapping $f : R^+ \rightarrow R$ given by $f(x) = \log x \forall x \in R^+$ is-

माना R^+ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का गुणनत्मक समूह और R वास्तविक संख्याओं का योगात्मक समूह है। तब $f(x) = \log x \forall x \in R^+$ द्वारा दिया गया प्रतिचित्रण $f : R^+ \rightarrow R$ -

- One - one and onto, but not homomorphism एकैक एवं आच्छादक है, किन्तु समाकारिता नहीं
- One-one and homomorphism, but not onto एकैक एवं समाकारिता है, किन्तु आच्छादक नहीं
- Onto and homomorphism, but not one-one आच्छादक एवं समाकारिता है, किन्तु एकैक नहीं
- One-one, onto and homomorphism एकैक, आच्छादक एवं समाकारिता है

Ans. (d) : one-one, onto and homomorphism.

Given $f : (R^+, \cdot) \rightarrow (R, +)$ defined by

$$f(x) = \log x, \forall x \in (R^+, \cdot)$$

Let $\log x_1 = \log x_2; x_1, x_2 \in (R^+, \cdot)$

$$\Rightarrow \log \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 1$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Hence f is one - one.

Now let $y \in (R, +)$ then there exists $x = e^y \in (R^+, \cdot) = (0, \infty)$ such that $\log x = \log (e^y) = y$.

Hence f is onto.

Let $x_1, x_2 \in (R^+, \cdot)$, then

$$\log(x_1 \cdot x_2) = \log x_1 + \log x_2; \quad \forall x_1, x_2 \in (R^+, \cdot)$$

$$\Rightarrow f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Hence f is homomorphism.

55. The relation of isomorphism in the set of all groups is-

सभी समूहों के समुच्चय में समरूपता का सम्बन्ध-

- Symmetric and transitive, but not reflexive सममित एवं संक्रामक है, किन्तु स्वतुल्य नहीं
- Reflexive and transitive, but not symmetric स्वतुल्य एवं संक्रामक है, किन्तु सममित नहीं।
- Reflexive and symmetric, but not transitive स्वतुल्य एवं सममित है, किन्तु संक्रामक नहीं
- Reflexive, symmetric and transitive संक्रामक, सममित एवं संक्रामक है

Ans. (d) : Reflexive, symmetric and transitive

Two group G and G' are said to be isomorphic if there exists an isomorphism ϕ from G to G'

Reflexive : There exists an isomorphism $\phi : G \rightarrow G$ from a group G to itself. Such an isomorphism is called an automorphism. Hence the relation of isomorphism in the set of all groups is reflexive. The identity map is an automorphism.

Symmetric : If $\phi : G \rightarrow G'$ is an isomorphism, the inverse map $\phi^{-1} : G' \rightarrow G$ is also an isomorphism.

Proof: The inverse of a bijective map is bijective. Since ϕ is a homomorphism then $\forall x, y \in G$, $\phi(\phi^{-1}(x) \cdot \phi^{-1}(y)) = \phi(\phi^{-1}(xy)) = xy = \phi(\phi^{-1}(xy))$

Transitive: If $\phi : G \rightarrow G'$ is an isomorphism and $\psi : G' \rightarrow G''$ is an isomorphism then $\psi \circ \phi : G \rightarrow G''$ is also an isomorphism.

56. In the group $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\}$ the order of a^5 is-

समूह $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\}$ में a^5 की कोटि है-

- 5
- 6
- 2
- 3

Ans. (b) : 6

In a finite group (G, o) of order n , let $a \in G$ and $O(a) = n$.

$$\text{Then } O(a^r) = \frac{n}{(n, r)}; (n, r): \text{gcd of } n \text{ and } r.$$

$$\text{gcd}(6, 5) = 1$$

$$\therefore O(a^5) = \frac{6}{(6, 5)} = \frac{6}{1} = 6$$

57. The number of generators of a cyclic group of order 8 is-

कोटि 8 के चक्रीय समूह के जनकों की संख्या है-

- 2
- 3
- 4
- 6

Ans. (c) : 4

Number of generators of a cyclic group of order 8 = number of positive integers smaller than 8 and relative prime to 8 = $n(\{1, 3, 5, 7\}) = 4$

58. For the multiplicative group of residue classes $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, (\text{mod } 7)\}$, generating element is-

अवशिष्ट वर्गों के गुणनात्मक समूह $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, (\text{mod } 7)\}$ के लिए, एक जनक अवयव है-

- $\bar{2}$
- $\bar{3}$
- $\bar{4}$
- $\bar{6}$

Ans. (b) : $\bar{3}$

$$\langle \bar{1} \rangle = \{\bar{1}\}$$

$$\langle \bar{2} \rangle = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\} = \langle \bar{4} \rangle$$

$$\langle \bar{3} \rangle = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\} = \langle \bar{5} \rangle$$

Hence $\bar{3}$ is a generator of the group described.

59. The alternating group A_3 on 3 symbols 1, 2, 3 is-
3 प्रतीकों 1, 2, 3 पर प्रत्यावर्ती समूह A_3 है-

- $\{I, (1\ 2)\}$
- $\{I, (1\ 3)\}$
- $\{I, (2\ 3)\}$
- $\{I, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

Ans. (d) : $\{I, (123), (132)\}$

Let S_3 denote the symmetric group of 3 symbols $\{1, 2, 3\}$

Then $S_3 = \{I, (12), (23), (31), (123), (132)\}$

Definition: A permutation that can be expressed as product of even number of 2-cycles is called an even permutation.

The set of even permutations in S_n forms a subgroup of S_n , denoted by A_n and is called the alternating group of degree n .

$$\text{Now, } (123) = (13)(12) \in A_n$$

$$(132) = (12)(13) \in A_n$$

$$\therefore A_n = \{I, (123), (132)\}.$$

60. Let Z be the additive group of integers and E the additive subgroup of even integers with zero, then the number of distinct cosets of E in Z is-

माना Z पूर्णाकों को योगात्मक समूह और E शून्य सहित सम पूर्णाकों का योगात्मक उपसमूह है, तब Z में E के भिन्न-भिन्न कोसमुच्चयों की संख्या है-

- (a) 2 (b) 3
(c) 1 (d) ∞

Ans. (a) : 2

There are two distinct cosets of the additive subgroup of even integers $(2Z, +)$ of group of integers $(Z, +)$ described by

$$0+2Z = \{2x; x \in Z\} = 2Z$$

$$1+2Z = \{2x+1; x \in Z\}$$

namely the set of even numbers and the set of odd numbers respectively.

61. The rank and nullity of the linear transformation $T: R^2 \rightarrow R^3$ defined by- $T(a, b) = (a-b, b-a, -a)$ are respectively-

$T(a, b) = (a-b, b-a, -a)$ द्वारा परिभाषित रेखिक रूपान्तरण $T: R^2 \rightarrow R^3$ की कोटि और शून्यता क्रमशः हैं-

- (a) 1, 1 (b) 2, 0
(c) 0, 2 (d) 2, 1

Ans. (b) : 2, 0

Clearly null space of T , $N(T) = \{(0,0)\}$

So, nullity $(T) = \dim(\{(0,0)\}) = 0$

$\therefore$ By Rank-Nullity Theorem we have

$$\dim(R^2) = \text{nullity}(T) + \text{rank}(T)$$

$$\Rightarrow 2 = 0 + \text{rank}(T)$$

$$\Rightarrow \text{rank}(T) = 2$$

62. If W_1 and W_2 are subspaces of a finite dimensional vector space V , then $\dim W_1 + \dim W_2$ is equal to-

यदि W_1 तथा W_2 किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V की दो उपसमिष्टियाँ हों, तो $\dim W_1 + \dim W_2$ बराबर होगा-

- (a) $\dim(W_1 + W_2)$
(b) $\dim(W_1 \cap W_2)$
(c) $\dim(W_1 + W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$
(d) $\dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$

Ans. (d) : $\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$

Theorem - If W_1, W_2 are subspaces of a vector space V , then

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Let $S = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ be a basis for $W_1 \cap W_2$. Because $W_1 \cap W_2$ is subspace of W_1 and W_2 and hence S can be extended to a basis for W_1 and W_2

Let $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s\}$

and $B_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_r, w_1, w_2, \dots, w_t\}$ be bases for W_1 and W_2 respectively.

Claim: Let $B = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s, w_1, w_2, \dots, w_t\}$

B is a basis for $W_1 + W_2$

Proof - First we show that B is linearly independent.

$$\text{Let } \sum_{i=1}^r a_i u_i + \sum_{j=1}^s b_j v_j + \sum_{k=1}^t c_k w_k = 0 \text{ for scalars } a_i, b_j, c_k$$

$$1 \leq i \leq r$$

$$1 \leq j \leq s$$

$$1 \leq k \leq t$$

Then $\sum_{i=1}^r a_i u_i + \sum_{j=1}^s b_j v_j = -\sum_{k=1}^t c_k w_k$; which shows that element on both the sides are in $W_1 \cap W_2$

$$\text{Thus } -\sum_{k=1}^t c_k w_k = \sum_{i=1}^r d_i u_i \text{ so } \sum_{i=1}^r d_i u_i + \sum_{k=1}^t c_k w_k = 0$$

which implies $d_i = 0$ and $c_k = 0$ for $1 \leq i \leq r, 1 \leq k \leq t$ since B_2 is linearly independent.

Therefore $\sum_{i=1}^r a_i u_i + \sum_{j=1}^s b_j v_j = 0$ which implies $a_i = 0$,

$b_j = 0$, for $a_i, b_j; 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ since B_1 is linearly independent.

Thus, B is linearly independent.

Now Let $w \in W_1 + W_2$. Then $w = w_1 + w_2$ for some $w_1 \in W_1$ for $i = 1, 2$.

$$\text{Then } w_1 = \sum_{i=1}^r p_i u_i + \sum_{j=1}^s q_j v_j \text{ and } w_2 = \sum_{i=1}^r g_i u_i + \sum_{k=1}^t h_k w_k$$

for scalars p_i, q_j, g_i, h_k

$$\text{Now } w = \sum_{i=1}^r (p_i + g_i) u_i + \sum_{j=1}^s q_j v_j + \sum_{k=1}^t h_k w_k$$

Thus w is in span (B)

Showing that $B = \{u_1, u_2, \dots, u_r, v_1, v_2, \dots, v_s, w_1, w_2, \dots, w_t\}$ is for $W_1 + W_2$

Which implies that

$$\dim(W_1 + W_2) = r + s + t = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

$$\Rightarrow \dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2)$$

63. Let V and W be two vector spaces over a field F . If $T: V \rightarrow W$ is a linear transformation such that $\dim V = 5$ and nullity $(T) = 2$, then rank (T) is -

माना V और W किसी क्षेत्र F पर दो समष्टियाँ हैं। यदि रेखिक रूपान्तरण $T: V \rightarrow W$ इस प्रकार है कि $\dim V = 5$ और शून्यता $(T) = 2$ हो, तो कोटि (T) है।

- (a) 0 (b) 2 (c) 3 (d) 1

Ans. (c) : 3

Rank-Nullity Theorem for a linear transformation $T: V \rightarrow W$ states that

$$\dim V = \text{nullity}(T) + \text{rank}(T)$$

where, V is finite dimensional vector space.

$$\text{So, rank}(T) = \dim V - \text{nullity}(T)$$

$$= 5 - 2$$

$$= 3$$

64. Then n^{th} roots of unity can be arranged as-
इकाई के n^{th} मूलों को व्यवस्थित किया जा सकता है-

- (a) an arithmetic progression/एक समान्तर श्रेणी में
(b) a geometric progression /एक गुणोत्तर श्रेणी में
(c) a harmonic progression/एक हरात्मक श्रेणी में
(d) an arithmetico - geometric progression
एक समान्तर-गुणोत्तर श्रेणी में